БЛАГОЈ С. ПОПОВ

О ЈЕДНОМ КАРАМАТИНОМ УСЛОВУ ИНТЕГРАБИЛИТЕТА БАЛИСТИЧКЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

(Примљено 29 децембра 1949 год.)

БЛАГОЈ С. ПОПОВ

О ЈЕДНОМ КАРАМАТИНОМ УСЛОВУ ИНТЕГРАБИЛИТЕТА БАЛИСТИЧКЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ*)

1. Предмет овога рада је балистичка диференцијална једначина

$$(y+\rho)\,y'+y^2-1=0 \tag{1}$$

у случају када $\rho(x)$ има облик

$$\rho(x)=Ae^{nx}+Be^{-nx}+R,$$

где су A, B, R и n константе.

Уопштавајући D'Alembert-ов услов интеграбилитета

$$\frac{1}{n^2}+\frac{AB}{n+1}=\frac{R^2}{(2+n)^2}, \tag{2}$$

Карамата[1]) је добио овај услов

$$\frac{1}{n^2}+\frac{AB}{k(k+n)}=\frac{R^2}{(2k+n)^2} \tag{3}$$

који се своди на D'Alembert-ов за $k=1$.

Сводећи диференцијалну једначину (1) на Legendre-ову једначину

$$(x^2-1)\,z''+(cx+b)\,z'+Mz=0, \tag{4}$$

ми ћемо показати да се услов интеграбилитета последње једначине, наиме

$$k(k-1)+ck+M=0 \qquad (k\text{-цео број}) \tag{5}$$

---

*) Професори Карамата и Митриновић прочитали су овај рад у рукопису и учинили су ми корисне примедбе.

[1]) Ј. Карамата, *Весник Друштва математичара и физичара Н. Р. С.* I_2, Београд, 1949, стр. 72-73, задатак 3.

своди управо на услов интеграбилитета (2) који је навео Карамата.

Затим, пошто се диференцијална једначина (4) може свести на хипергеометриску диференцијалну једначину[2])

$$x\,(1-x)\,y''+[(\gamma-\alpha+\beta+1)]\,y'-\alpha\beta y=0, \tag{6}$$

ми ћемо показати да се општи интеграл диференцијалне једначине (1) може увек изразити помоћу хипергеометриских функција $F\,(\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,x)$. С друге стране, познато је да је диференцијална једначина (6) интеграбилна квадратурама, када је један од четири броја[3]) α, β, $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$ цео број.

Показаћемо да се сваки од ових четири услова интеграбилитета своди на услов (3), када се пређе од диференцијалне једначине (6) на диференцијалну једначину (1).

2. Уношењем функције $\rho\,(x)$ у (1) и сменом

$$e^{nx}=t, \tag{7}$$

добијамо Riccati-еву диференцијалну једначину по промењивој t, облика

$$(1-y^2)\,\frac{dt}{dy}-[nAt^2+(nv+nR)\,t+nb]=0.$$

Сменом промењиве y са x имаћемо диференцијалну једначину

$$(1-x^2)\,\frac{dt}{dx}-[nAt^3+(nx+nR)\,t+nB]=0. \tag{8}$$

Новом трансформацијом

$$z=exp\left(\int\frac{nA}{(1-x^2)}\,tdx\right) \tag{9}$$

диференцијална једначина (8) постаје

$$(1-x^2)^2\,z''-[(n+2)\,x+nR]\,(1-x^2)\,z'+n^2\,ABz=0.$$

После увођења нових ознака

$$a=n^2\,AB;\quad r=nR;\quad n+2=m \tag{10}$$

---

[2]) E. Kamke, *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen*, Bd. I, 1942, S 22.

[3]) Goursat, *Propriétés générales de l'équation d'Euler et de Gauss*, Actualités scientifiques et industrielles, 1936, p. 6.

и сменом промењиве z са y имамо једначину

$$(x^2-1)^2 y''+[(mx+r)(x^2-1)]\,y'+ay=0, \tag{11}$$

одакле трансформацијом

$$y=(x-1)^p (x-1)^q v \tag{12}$$

где су p и q за сада још неодређени параметри, диференцијална једначина (11) после сређивања, постаје

$$\begin{aligned}(x^2-1)^2 z''+(x^2-1)\,[(mx+r)+2p(x+1)+2q(x-1)]\,z'+\\ +p(p-1)(x+1)^2+2pq(x^2-1)+q(q-1)(x-1)^2+\\ +p(mx+r)(x+1)+q(mx+r)(x-1)+a\,z=0.\end{aligned} \tag{13}$$

Означимо ли са

$$\begin{aligned}P(x)\equiv(p+q)(p+q+m-1)\,x^2+[2(p^2-q^2)-(m-2)(p-q)+\\ +r(p+q)]\,x+(p-q)^2-(p+q)+r(p-q)+a,\end{aligned}$$

диференцијална једначина (13) постаје

$$\begin{aligned}(x^2-1)^2 z''+(x^2-1)\{[2(p+q)+m]\,x+2(p-q)+\\ +r\}\,z'+P(x)\,z=0.\end{aligned} \tag{14}$$

Параметре p и q можемо изабрати увек тако да буде

$$P(x)=M(x^2-1), \tag{15}$$

где M означава једну константу.

Уношењем ове вредности за $P(x)$ у диференцијалну једначину (14) и увођењем нових ознака

$$\begin{aligned}c&\equiv 2(p+q)+m\\ b&\equiv 2(p-q)+r\end{aligned} \tag{16}$$

добијамо, после скраћивања са (x^2-1), диференцијалну једначину облика

$$(x^2-1)\,z''+(cx+b)\,z'+Mz=0. \tag{17}$$

3. Потражимо сада везу између констананата A, B, R и n и ново уведених p, q и M. Идентитет (15) доводи нас до три релације

$$\begin{aligned}&(p+q)(p+q+m-1)=M,\\ &2(p^2-q^2)+(m-2)(p-q)+r(p+q)=0,\\ &(p-q)^2+r(p-q)-(p+q)+a=-M.\end{aligned} \tag{18}$$

Одавде добијамо

$$4p=-(m+r-2)\pm\sqrt{(m+r-2)^2-4a},$$

$$4q=-(m+r-2)\pm\sqrt{(m-r-2)^2-4a},$$

$$M=(p+q)(p+q+m-1),$$

или с обзиром на (10)

$$p=-\frac{n}{4}\{R+1\pm\sqrt{(R+1)^2-4AB}\},$$

$$q=-\frac{n}{4}\{R-1\pm\sqrt{(R-1)-4AB}\},$$

$$M=s(s+n+1),$$

где је стављено

$$s=p+q.$$

Елиминацијом $(p-q)$ и M из релација (18) налази се

$$\frac{r^2}{[2(p+q)+m-2]^2}=\frac{a}{(p+q)[(p+q)+m-2]}+1$$

одакле с обзиром на (10) следује једначина

$$\frac{R^2}{(2s+n)^2}=\frac{AB}{s(s+n)}+\frac{1}{n^2} \tag{19}$$

која је управо истог облика као и услов интеграбилитета (3) који је навео Карамата.

Да би Legendre-ова диференцијална једначина (17) имала за партикуларни интеграл један полином $Q(y)$ степена k, потребно и довољно је да услов

$$k(k-1)+ck+M=0 \qquad (k=\text{цео број})$$

буде задовољен. Узимајући у обзир релације (10), (16), и (18), овај услов постаје

$$s^2+(2k+n+1)s+k(k+n+1)=0,$$

одакле излази

$$s=-k \quad \text{или} \quad s=-(k+n+1).$$

Ако се ове вредности за s унесу у услове (19), добија се очевидно услов интеграбилитета (3) у коме је k замењено респективно са $-k$ и са $k+1$.

У овом случају један партикуларан интеграл балистичке једначине (1) дат је изразом

$$sy - \frac{nRs}{n+2s} + (y^2 - 1)\frac{Q'}{Q} = nAe^{nx},$$

где $Q(y)$ претставља полином степена k, који је један партикуларан интеграл Legendre-ове диференцијалне једначине (17).

4. До истог резултата долазимо, сводећи Legendre-ову диференцијалну једначину (17) сменом

$$z(x) = \eta(\xi), \quad 2\xi = x + 1$$

на једначину

$$\xi(1-\xi)\eta'' + \left(\frac{c-b}{2} - c\xi\right)\eta' - M\eta = 0,$$

тј. на једначину

$$x(1-x)y'' + \left(\frac{c-b}{2} - cx\right)y' - Mx = 0 \tag{20}$$

$$(\xi = x, \quad \eta = y).$$

Последња једначина претставља хипергеометриску диференцијалну једначину, чији општи облик гласи

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0, \tag{6}$$

где су α, β и γ произвољни, али од x независни бројеви.

Потражимо везу између констаната опште хипергеометриске једначине α, β, γ и констаната b, c, M хипергеометриске једначине (20).

Из (20) и (6) имамо

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 1 &= b, \\ 2\gamma &= c - b, \\ \alpha\beta &= M. \end{aligned} \tag{21}$$

Прва и трећа од ових једначина, имајући у виду вредности за c и M из (16) односно (18), дају

$$\alpha = s, \quad \beta = s + m - 1.$$

Из друге од једначина (21), а с обзиром на другу од једначина (16) излази

$$\gamma = \frac{2s+m}{2} - \frac{r(m-2)}{2(2s+m-2)}.$$

Имајући у виду вредности константата r и m из (10), добијамо

$$\alpha = s, \quad \beta = s + n + 1, \quad \gamma = \frac{2s + n + 2}{2} - \frac{n^2 R}{2(2s+n)}. \tag{22}$$

Како је партикуларни интеграл диференцијалне једначине (б) дат хипергеометриским редом, који се краткоће ради означава са $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, један партикуларан интеграл диференцијалне једначине (20) биће дат редом

$$y = F\left(s, s+n+1, \frac{2s+n+2}{2} - \frac{n^2 R}{2(2s+n)}, x\right)$$

где је s дефинисано са

$$s = p + q.$$

Да бисмо нашли услов интеграбилности диференцијалне једначине (1) помоћу квадратура, потражићемо један партикуларан интеграл једначине (б) у коначном облику.

Из теорије хипергеометриске диференцијалне једначине познато[1]) је да ће хипергеометриска диференцијална једначина имати један партикуларан интеграл облика

$$\begin{aligned} & y = P(x), \\ & y = x^{1-\gamma} P(x), \\ & y = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} P(x), \\ & y = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} P(x), \\ & (P(x) - \text{полином по } x) \end{aligned} \tag{23}$$

ако је један од бројева α, β, $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$ цео број.

Применимо сада ове услове на диференцијалну једначину (20).

а) Добијамо прво да α односно s мора бити цео број, позитиван или негативан. При томе чинимо дакле ограничење за произвољно изабране параметре p и q чији је збир s.

Но тако постављени услов за s показује да је веза (19) између коефицијената диференцијалне једначине (1) и s у ствари Караматин услов интеграбилитета диференцијалне једначине (1), замењујући s са k.

[1]) Forsyth-Jacobsthal, *Lehrbuch der Differential-Gleichungen* 1912, S. 221.

Из овога следује да ће диференцијална једначина (20) имати партикуларан интеграл облика (23).

б) Претпоставимо с обзиром на (23) да је s различито од целог броја, а β цео број тј.

$$s+n=k \qquad (k = \text{цео број})$$

одакле добијамо за s вредност

$$s=k-n. \tag{24}$$

Ако се ова вредност за s замени у услов (19), добијамо услов интеграбилитета облика

$$\frac{R^2}{(n-2k)} = \frac{AB}{-k(n-k)} + \frac{1}{n^2}$$

који се своди на (3), где је k замењено са $-k$.

Хипергеометриска једначина имаће и у овом случају један интеграл облика (23). Диференцијална једначина биће интеграбилна, јер је услов (19) односно (3) задовољен.

в) Из услова да $\gamma-\alpha$ буде цео број, изостављајући случај када је s цео број, добијамо

$$\frac{n}{2}-\frac{n^2 R}{2(2s+n)}=k, \qquad (k=\text{цео број}) \tag{25}$$

Одавде за s налазимо вредност

$$s=\frac{n(R-1)+2k}{2(n-2k)}\,n.$$

Тако добивена вредност за s унешена у (19) своди последњу једначину на услов интеграбилитета (3) балистичке диференцијалне једначине. Разуме се да вредност за s дата формулом (25) садржи и вредност за s која је добијена из (24) и обратно.

г) Услов да $\gamma-\beta$ буде цео број даје

$$\frac{n}{2}-\frac{n^2 R}{2(2s+n)}=k \qquad (k=\text{цео број}).$$

Одавде налазимо за s вредност

$$s=-\frac{nR+(n+2k)}{2(n+2k)}\,n,$$

која унешена у (19) своди ову релацију на Караматин услов интеграбилитета (3) диференцијалне једначине (1).

5. Претпоставимо да смо нашли један партикуларан интеграл хипергеометриске диференцијалне једначине (20) и означимо га са

$$\eta = F(\alpha, \beta, \gamma, \xi),$$

где α, β, γ узимају одређене вредности и где је бар један од бројева α, β, $\gamma - \alpha$, $\gamma - \beta$ цео број, односно да је један од услова у § 4 испуњен.

Партикуларни интеграл Legendre-ове диференцијалне једначине биће у том случају

$$= F\left(\alpha, \beta\, \gamma, \frac{x+1}{2}\right)$$

водећи рачуна о смени

$$\eta(\xi) = z(x); \quad 2\xi = x + 1. \tag{26}$$

За линеарну диференцијалну једначину, овај партикуларни интеграл добија облик

$$z = (x-1)^p (x+1)^q F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x+1}{2}\right)$$

ако се има у виду релација (12) и промена y са z.

Параметре p и q одређујемо из (18) према датим вредностима констананата A, B, R и n.

Riccati-ева диференцијална једначина (8) има у овом случају партикуларни интеграл облика

$$t_1 = \frac{\dfrac{d}{dx}\left[(x-1)^p (x+1)^q F\left(\alpha, \beta, \gamma, \dfrac{x-1}{2}\right)\right]}{nA(x-1)^{p-1}(x+1)^{q-1} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \dfrac{x+1}{2}\right)}.$$

Свођењем Riccati-еве диференцијалне једначине помоћу партикуларног интеграла на линеарну, налазимо општи интеграл ове, а одавде и општи интеграл Riccati-еве диференцијалне једначине.

Смена (7) доводи до општег интеграла балистичке диференцијалне једначине.

6. Пример. На крају ћемо навести један нумерички пример.

Узмимо за параметре p, q и произвољни цео број k, следеће вредности

$$p = \frac{1}{2}, \quad q = 1, \quad k = -1.$$

У том случају имаћемо према (22)

$$s = \alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = -1, \quad m = -\frac{3}{2}. \tag{27}$$

Из (18) добијамо

$$M = -\frac{3}{2}, \quad r = -\frac{1}{6}, \quad a = \frac{8}{3}$$

или с обзиром на (10)

$$AB = \frac{32}{147}, \quad R = \frac{1}{21}, \quad n = -\frac{7}{2}.$$

Релације (16) дају

$$c = \frac{3}{2}, \quad b = -\frac{7}{6},$$

па имамо за Υ

$$\Upsilon = \frac{4}{3}. \tag{28}$$

Облик балистичке диференцијалне једначине у овом случају је

$$\left(y + e^{-\frac{7}{2}x} + \frac{32}{147} e^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{21}\right) y' + y^2 - 1 = 0. \tag{29}$$

Сменом

$$e^{-\frac{7}{2}x} = t, \tag{30}$$

добијамо Riccati-еву диференцијалну једначину

$$(y^2 - 1)\frac{dt}{dy} - \frac{7}{2} t^2 + \left(\frac{1}{21} + y\right) t + \frac{32}{147} = 0. \tag{31}$$

Нова трансформација

$$t = \frac{2}{7}(1 - y^2)\frac{z'}{z}; \quad z = (y-1)^{\frac{1}{2}}(y+1)\, u, \tag{32}$$

доводи до Legendre-ове диференцијалне једначине

$$(y^2 - 1)\, u'' + \left(\frac{3}{2} y - \frac{7}{6}\right) u' - \frac{3}{2} u = 0.$$

Ова последња с обзиром на смену (26) прелази у хипергеометриску једначину

$$\xi(\xi-1)\eta''+\left(\frac{3}{2}\xi-\frac{4}{3}\eta'\right)-\frac{3}{2}\eta=0,$$

а ту једначину смо могли добити директно с обзиром на (27) и (28).

Партикуларни интеграл последње диференцијалне једначине биће дат изразом

$$\eta=C_1\,F\left(\frac{3}{4},-1,\frac{4}{3},\xi\right),$$

који можемо писати и овако:

$$\eta=C_1\,(7-9\,\xi),$$

где је C_1 произвољна константа интеграције.

С обзиром на смене (26) и (32), партикуларни интеграл Riccati-еве диференцијалне једначине (31) имаће облик

$$t_1=\frac{1}{7}\,\frac{30\,y-45\,y^2+11}{9\,y-7}.$$

Општи интеграл Riccati-еве диференцијалне једначине биће

$$\varphi(y)\,[C+\psi(y)]\,(t-t_1)=1,$$

где је

$$\varphi(y)=(y+1)^{\frac{1}{3}}(y-1)^{-\frac{5}{6}}(9\,y-7)^2,$$

$$\psi(y)=-\frac{7}{2}\int\frac{dv}{(y+1)(y+1)\,\varphi(y)}.$$

С обзиром на смену (30), општи интеграл балистичке диференцијалне једначине (29) је

$$\varphi(y)\,[C+\psi(y)]\left(e^{-\frac{7}{2}x}-t_1\right)=1.$$

Ради проверавања добијеног резултата, из последње релације елиминисали смо C и добили једначину облика (1) која одговара у овом случају.

Б. С. ПОПОВ

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ КАРАМАТЫ, О ИНТЕГРИРОВАНИИ БАЛЛИСТИЧЕСКАГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

(Вывод)

С помощью дифференциального уравнения Лежандра, а потом и гиппергеометрического дифференциального уравнения, автор доказывает Караматино условие интегрирования баллистического дифференциального уравнения, каторое имеет вид (3) и каторый при $k=1$, превращается в условие Даламбера.

B. S. POPOV

SUR LA CONDITION D'INTÉGRABILITÉ DE KARAMATA DE L'ÉQUATION DE LA BALISTIQUE EXTÉRIEURE

(Résumé)

1. Soit donnée l'équation différentielle de la balistique

$$(y+\rho)\,y'+y^2-1=0, \tag{1}$$

où la fonction $\rho\,(x)$ est de la forme

$$\rho\,(x)=Ae^{nx}+Be^{-nx}+R,$$

A, B, R et n étant des constantes.

En généralisant la condition d'intégrabilité de d'Alembert

$$\frac{1}{n^2}+\frac{AB}{n+1}=\frac{R^2}{(2+n)^2}.$$

Karamata[1]) a donné, sous forme de problème, la condition suivante

$$\frac{1}{n^2}+\frac{AB}{k(k+n)}=\frac{R}{(2k+n)^2}, \quad k=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \tag{2}$$

qui se réduit à celle de d'Alembert pour $k=1$.

En ramenant l'équation différentielle (1) à celle de Legendre

$$(y^2-1)\,v''+(cy+b)\,v'+Mv=0, \tag{3}$$

nous allons montrer, en premier lieu, que la condition d'intégrabilité de cette dernière équation, à sovoir

$$k\,(k-1)+ck+M=0, \quad k \text{ entier}, \tag{4}$$

se réduit justement à la condition d'intégrabilité (2) donnée par Karamata.

En second lieu, étant donné que l'on peut ramener l'équation différentielle (3) à celle des fonctions hypergéométriques

$$\xi(1-\xi)\eta''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)\xi]\eta'-\alpha\beta\gamma=0, \tag{5}$$

nous montrerons que, dans le cas générale de l'équation différentielle (1) peut toujours s'exprimer au moyen des fonctions hypergéométriques $F(\alpha, \beta, \gamma, \eta)$. D'autre part, étant donné que l'équation hypergéométrique (5) est intégrable par quadrature[2]), lorsque l'un des quatres nombres

$$\alpha, \beta, \gamma-\alpha \quad \text{ou bien} \quad \gamma-\alpha \quad \text{est entier,} \tag{6}$$

nous montrerons que chacune de ces quatres conditions d'intégrabilité se réduit à la condition (2), lorsque l'on passe de l'équation différentielle (5) à l'équation différentielle (1). D'ailleurs ce résultat est presque évident puisque, d'une part, les conditions (6) sont équivalente à la condition (4), lorsqu'on passe de l'éqnation différentielle (5) à l'équation différentielle (3), et d'autre part, la condition (4) est équivalente à la condition (2), lorsqu'on passe de l'équation différentielle (3) à l'équation différentielle (1).

2. Pour ramener l'équation différentielle (1) à l'équation différentielle (3), effectuons d'abord la substitution

$$z=exp\left(\int\frac{nA}{y^2-1}\,e^{nx}dy\right).$$

En posant, pour abréger,

$$a=n^2AB, \quad r=nB \quad \text{et} \quad m=n+2, \tag{7}$$

l'équation d fférentielle (1) se déduit alors à l'équation linéaire du second ordre, suivante

$$(y^2-1)^2z''+(my+r)(y^2-1)z'+az=0. \tag{8}$$

En y effectuant, en second lieu, la substitution

$$z=(y-1)^p(y+1)^q v,$$

p et q étant des paramètres encore indéterminés, (qui me fut suggéré par Karamata), l'équation (8) se réduit à la suivante

$$(y^2-1)^2v''+(y^2-1)\{[2(p+q)+m]y+2(p-q)+r\}v'+P(y)v=0, \tag{9}$$

où l'on a posé

$$P(y)=$$
$$=(p+q)(p+q+m-1)y^2+[2(p^2-q^2)+(m-2)(p-q)+r(p+q)]y+$$
$$+(p-q)^2-(p+q)+r(p-q)+a.$$

Or, on peut toujours déterminer les paramètres p et q et une constante M de manière que le polynome $P(y)$ prenne la forme

$$P(y)=M(y^2-1). \tag{10}$$

En introduisant cette valeur de $P(y)$ dans l'équation différentielle (9) et en y posant, pour abrégér,

$$c=2(p+q)+m \quad \text{et} \quad b=2(p-q)+r, \tag{11}$$

cette équation se réduit à l'équation de Legendre[3])

$$(y^2-1)v''+(cy+b)v'+Mv=0. \tag{12}$$

Or, pour que l'identité (10) ait lieu, il faut que p, q et M satisfont aux conditions

$$
\begin{gathered}
(p-q)(p+q+m-1)=M,\\
2(p^2-q^2)+(m-2)(p-q)+r(p+q)=0,\\
(p-q)^2+r(p-q)-(p+q)+a=-M.
\end{gathered}
\tag{13}
$$

On en tire, en tenant compte de relation (7), que

$$
p=-\frac{n}{4}\left\{R+1\pm\sqrt{(R+1)^2-4AB}\right\},
$$

$$
q=-\frac{n}{4}\left\{R-1\pm\sqrt{(R-1)^2-4AB}\right\},
$$

$$
M=s(s+n+1), \tag{14}
$$

où l'on a posé

$$
s=p+q.
$$

Mais, en éliminant $(p-q)$ et M des équations du système (13), l'on obtient pour $p+q=s$ l'équation

$$
\frac{R^2}{(2s+n)^2}=\frac{AB}{s(s+n)}+\frac{1}{n^2}, \quad (s=p+q), \tag{15}
$$

qui est justement de la même forme que la condition d'intégrabilité (2) de Karamata.

Or, pour que l'équation différentielle de Legendre (12) ait pour intégrale particulière un polynome $Q(y)$ de degré k, il faut et il suffit que la condition (4), c. à d. la conition

$$
k(k-1)+ck+M=0, \quad k \text{ entier},
$$

soit satisfaite. En tenant compte des relations (7), (11) et (14) cette condition se réduit à

$$
s^2+(2k+n+1)s+k(k+n+1)=0,
$$

c. à d. à

$$
s=-k, \quad \text{ou bien} \quad s=-(k+n+1).
$$

Ces valeurs de s introduites dans la condition (15) donnent justement la condition d'intégrabilité (2), dans laquelle k est à remplacer d'une part par $-k$, d'autre part par $k+1$.

Remarquons, enfin, que dans ce cas une intégrale particuliere de l'équation de la balistique (1) est donnée par l'expression

$$
sy-\frac{nRs}{n+2s}+(y^2-1)\frac{Q'}{Q}=nAe^{nx},
$$

$Q(y)$ désignant le polynome du degré k, qui est une intégrale particulière de l'équation de Legendre (12).

3. On parvient au même résultat en réduisant l'équation (12) de Legendre, par les substitutions

$$
v(y)=\eta(\xi), \quad 2\xi=y+1, \tag{16}
$$

à l'équation hypergéométrique

$$\xi\,(1-\xi)\,\eta''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)\,\xi]\,\eta'-\alpha\beta\eta=0, \tag{17}$$

où l'on a, d'après (7), (11) et (14

$$\alpha=s,\quad \beta=s+n+1,\quad \gamma=\frac{2s+n+2}{2}-\frac{n^2R}{2\,(2s+n)}\,. \tag{18}$$

Étant donné qu'une intégrale particulière de l'équation (17) est la fonction hypergéométrique même

$$\eta=F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \xi),$$

il s'en suit, d'après les substitutions (16), qu'une intégrale particulière de l'équation de Legendre (12) est donnée par

$$v\,(y)=F\left(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \frac{y+1}{2}\right),$$

d'où il résulte que l'intégration générale de l'équation de la balistique (1) peut s'exprimer au moyen des fonctions hypergéometriques.

D'autre part, en désignant par $P(\xi)$ un polynome en ξ, il est connu[4]) que l'équation différentielle (17) possède une intégrale particulière de la forme

$$\begin{aligned} &\eta=P\,(\xi) \text{ lorsque } \alpha \text{ est un entier,}\\ &\eta= {}^{1-\gamma}\,P\,(\xi) \text{ lorsque } \beta \text{ est un entier,}\\ &\eta=(1-\xi)^{\gamma-\alpha-\beta}\,P\,(\xi) \text{ lorsque } \gamma-\alpha \text{ est un entier,}\\ &\eta=\xi^{1-\gamma}\,(1-\xi)^{\gamma-\alpha-\beta}\,P\,(\xi) \text{ lorsque } \gamma-\beta \text{ est entier.} \end{aligned} \tag{19}$$

En posant donc, respectivement,

$$\alpha=k,\quad \beta=k,\quad \gamma-\alpha=k,\quad \gamma-\beta=k,$$

k étant un entier, on en tire pour s les expressions suivantes

$$\begin{aligned} &s=k,\\ &s=n-k,\\ &s=\frac{n^2\,(R-1)+2nk}{2\,(n-2k)}=n\,\frac{nR-(n-2k)}{2\,(n\quad 2k)}\,,\\ &s=\frac{n^2\,(R+1)+2nk}{4k+2n}=-n\,\frac{nR+(n+2k)}{2\,(n+2k)}\,. \end{aligned}$$

Ces valeurs de s introduites dans la condition (15) se réduisent toujours à la condition d'intégrabilité (2) de Karamata, où k est à remplacer respectivement par

$$k,\quad -k,\quad -k \quad \text{et} \quad k.$$

Ainsi les quatres conditions de l'intégrabilité de l'équation hypergéométrique (17) se réduisent à la seule condition d'intégrabilité (2) de l'équation de la balistique (1). Quant à l'intégrale de l'équation (1), dans ces cas on l'obtient moyennant les intégrales particulières (19) de l'équation (17).

Index bibliographique

1) K a r a m a t a J. — Problème № 3. *Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie*, I_2, p. 72 (1949).

2) F o r s y t h - J a c o b s t h a l, *Lehrbuch der Differentalgleichungen*, 1912, S. 221.

3) K a m k e E. *Differentialglechungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Bd. I, 1942, S. 22.

4) G o u r s a t, *Propriétés générales de l'équation d'Euler et de Gauss*, Actualités scientifiques et industrielles, 1936, p. 6.